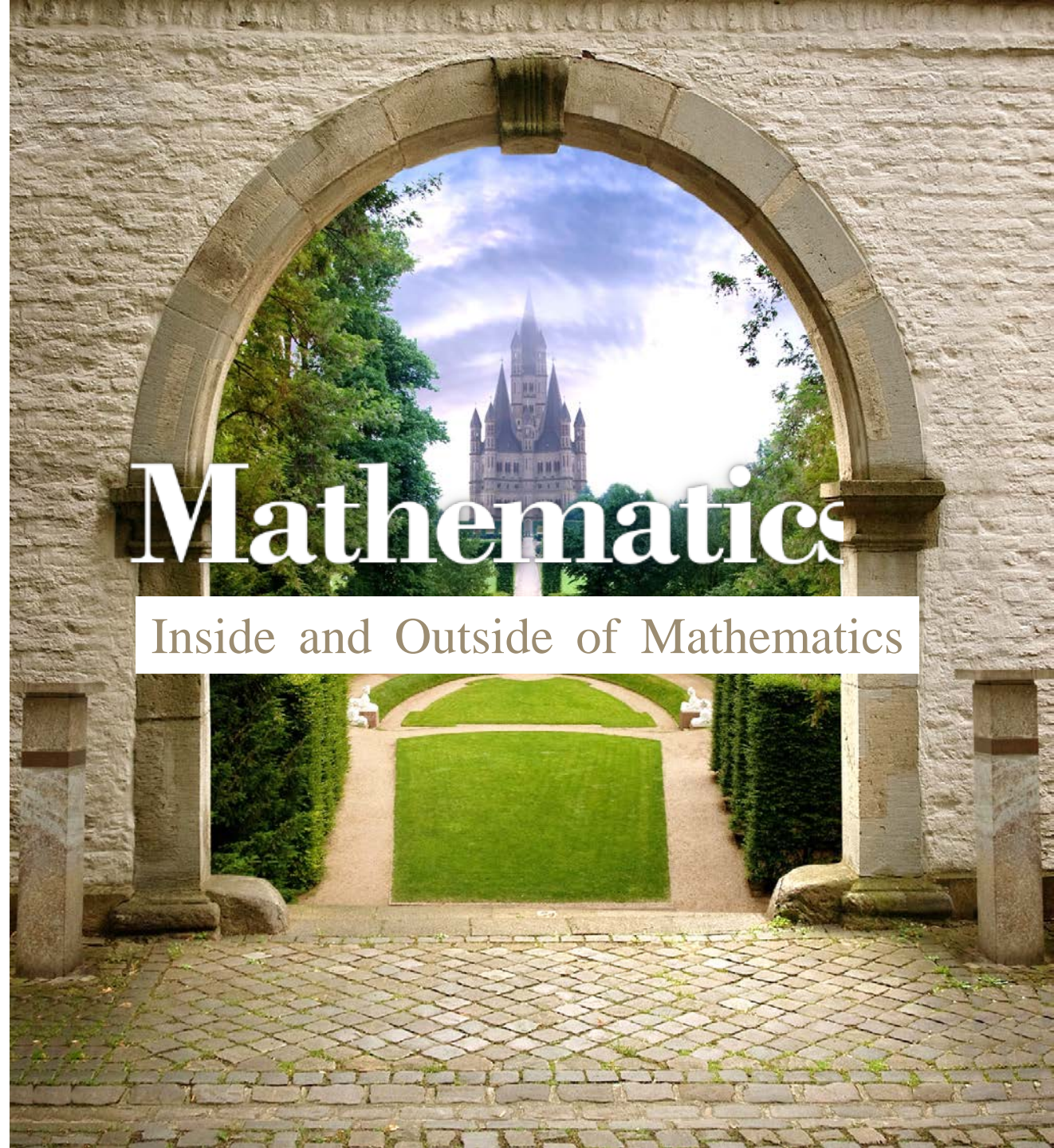


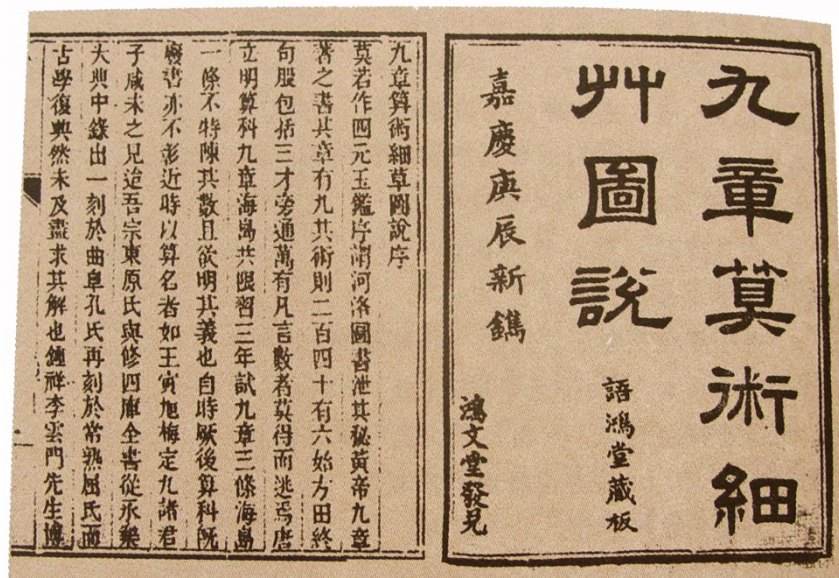
数学内外

田刚

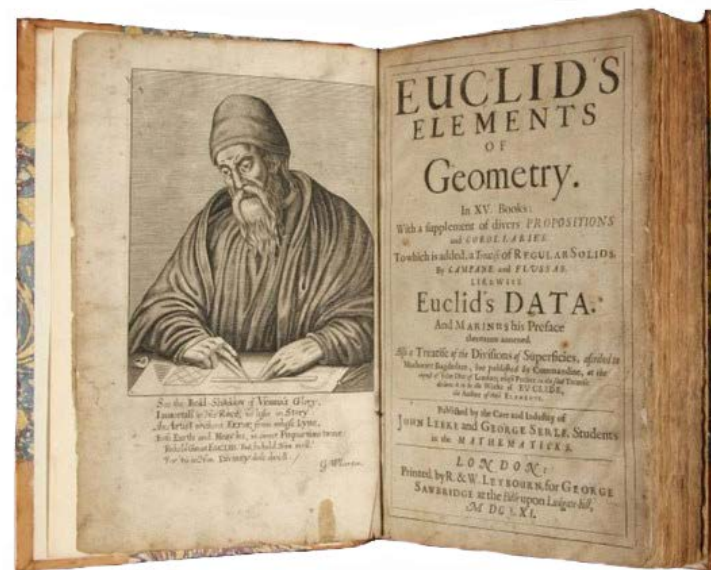


Mathematics

Inside and Outside of Mathematics



在中国古代，数学叫作算术，是六艺之一（六艺中“数”）。



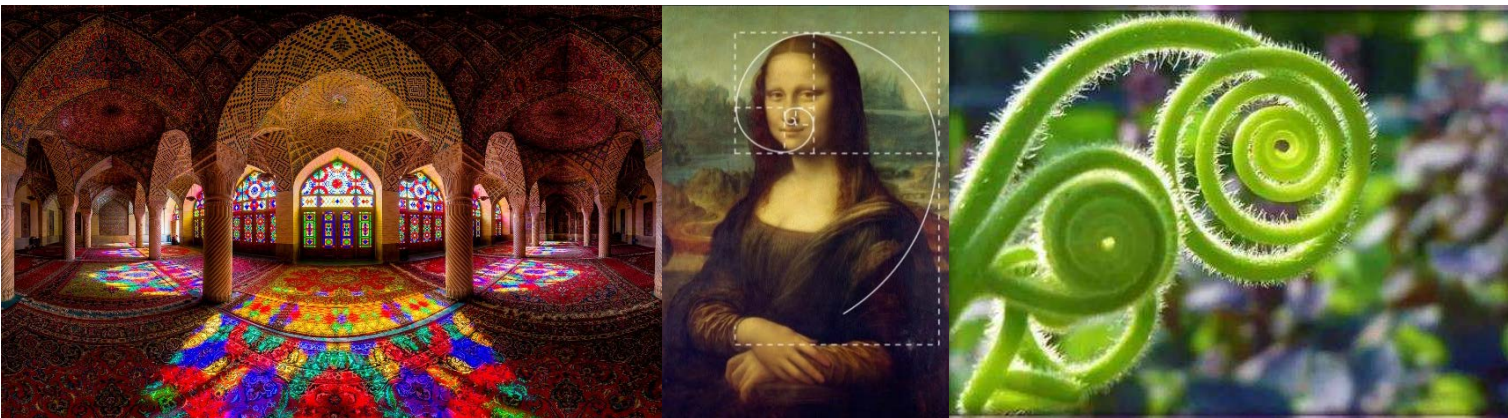
数学在古希腊语中有学习、学问、科学之意，被视为“学问的基础”。

数学美

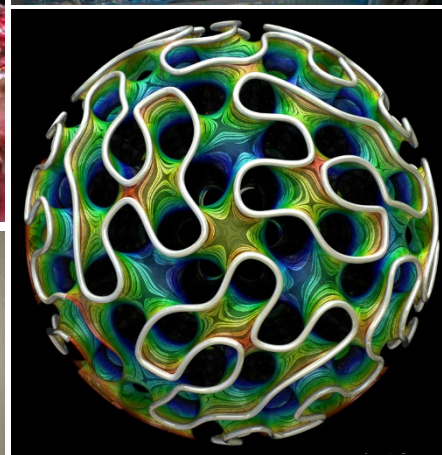
是自然美的客观反映，是科学美（内在美）的核心。
也体现在艺术等美中。

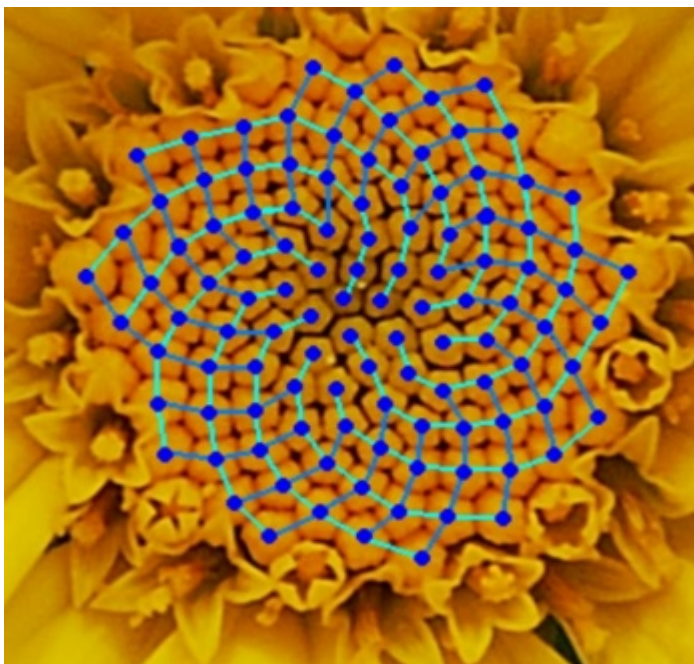
“ 就数学本身而言，是壮丽多彩、
千姿百态、引人入胜的。

——华罗庚 ”



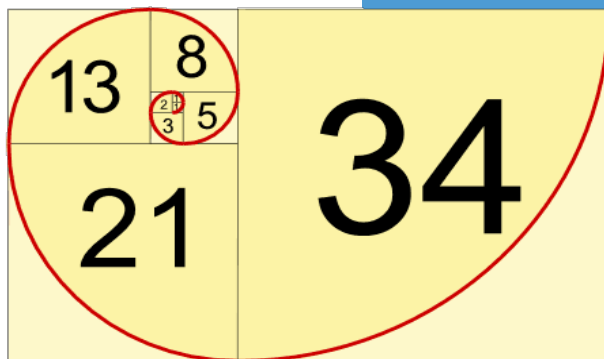
“ 哪里有数学，
哪里就有美。
——普洛克拉斯 ”

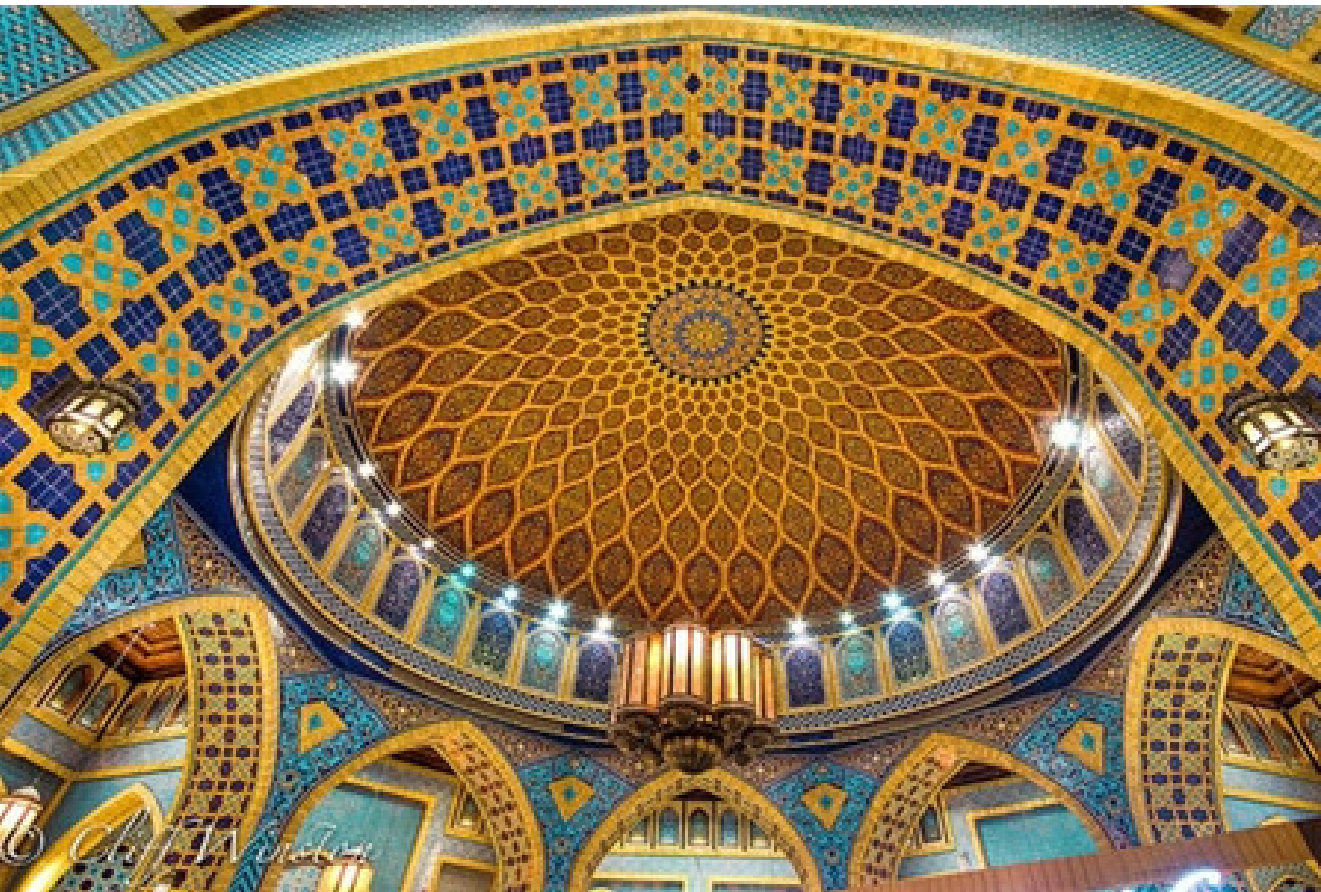




斐波那契数列

21个深蓝色螺旋和13个宝石绿螺旋。13和21是斐波那契数列中的相邻数字。





谢科洛夫拉清真寺的房顶

建筑中的数学美

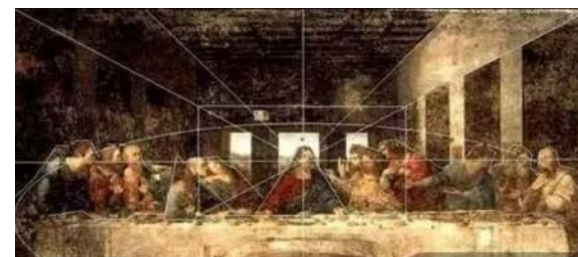
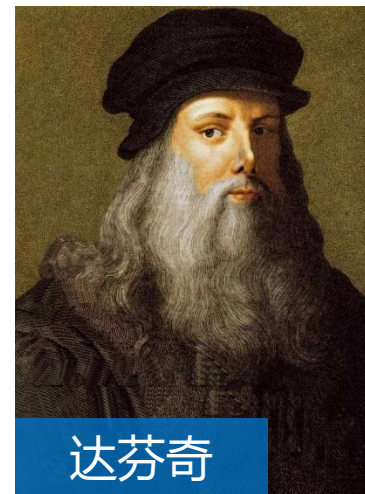
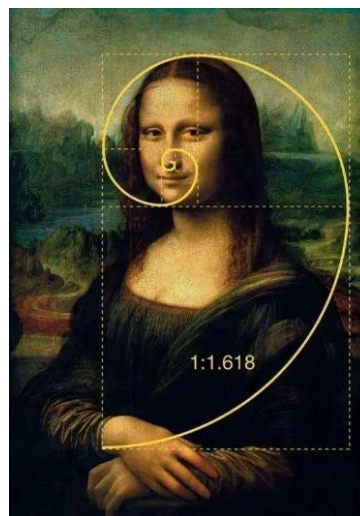
建于17世纪的伊朗伊斯法韩

人们在建筑中也使用了这种“双螺旋图案”。

艺术中的数学美

著名的数学表达式斐波纳契数列以及其中衍生的“黄金分割”定律，在达芬奇为数不多却闻名于世的绘画作品中反复运用，其中就包括《蒙娜丽莎》和《最后的晚餐》。

《最后的晚餐》：12个门徒分成3组，每组4人，对称地分布在基督的两边。基督本人被画成一个等边三角形，这样的描绘目的在于，表达基督的情感和思考，并且身体处于一种平衡状态。





美丽花园

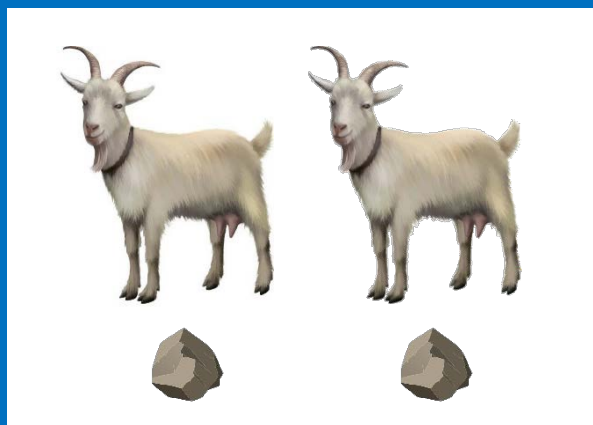
数学是一座百花齐放的美丽花园，但它的内在美有墙挡着，外边人不能一下子就领略到它的美丽。如果只是站在门外看，只能看到它通过自然和艺术等表现的美。



数学的起源和早期发展

数学起源于人类早期的生产活动

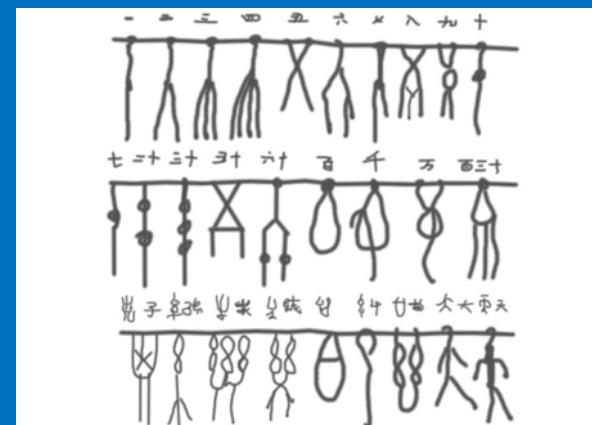
最早计数



实物记数



骨片刻画



结绳计数

我国《易经》中提到“结绳计数”，在印加帝国、希腊、波斯、罗马都有。



陶筹计数 (公元前8000年左右)

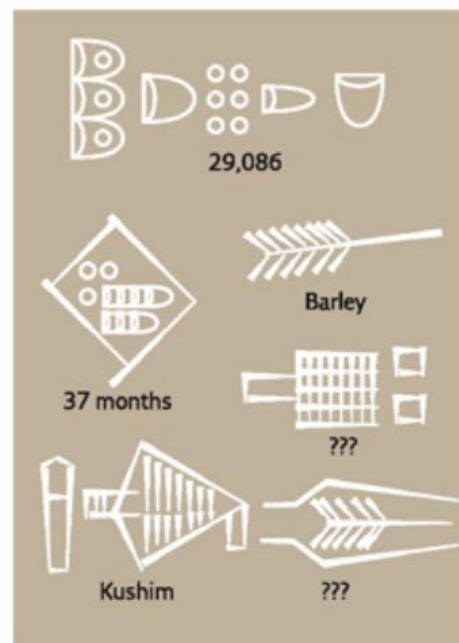
有考古学家认为陶筹与楔形文字的发明有重要关系。

苏美尔人的

乌鲁克泥板

第一个有记录财务数据的文件

计数的符号取决于被计数的对象。





公元前3千纪初期，数字获得了新的生命形式，
数字从具体物品中、从现实中抽离出来。

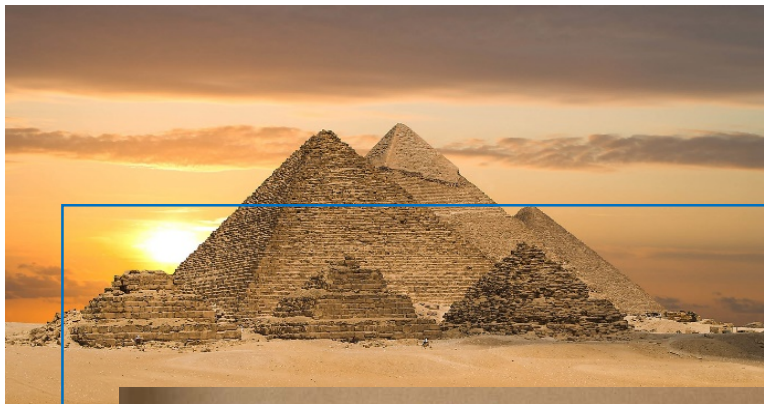
起初是自然数，如

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

之后引进有理数，即两个整数的比。

毕达哥拉斯：

数是万物之本



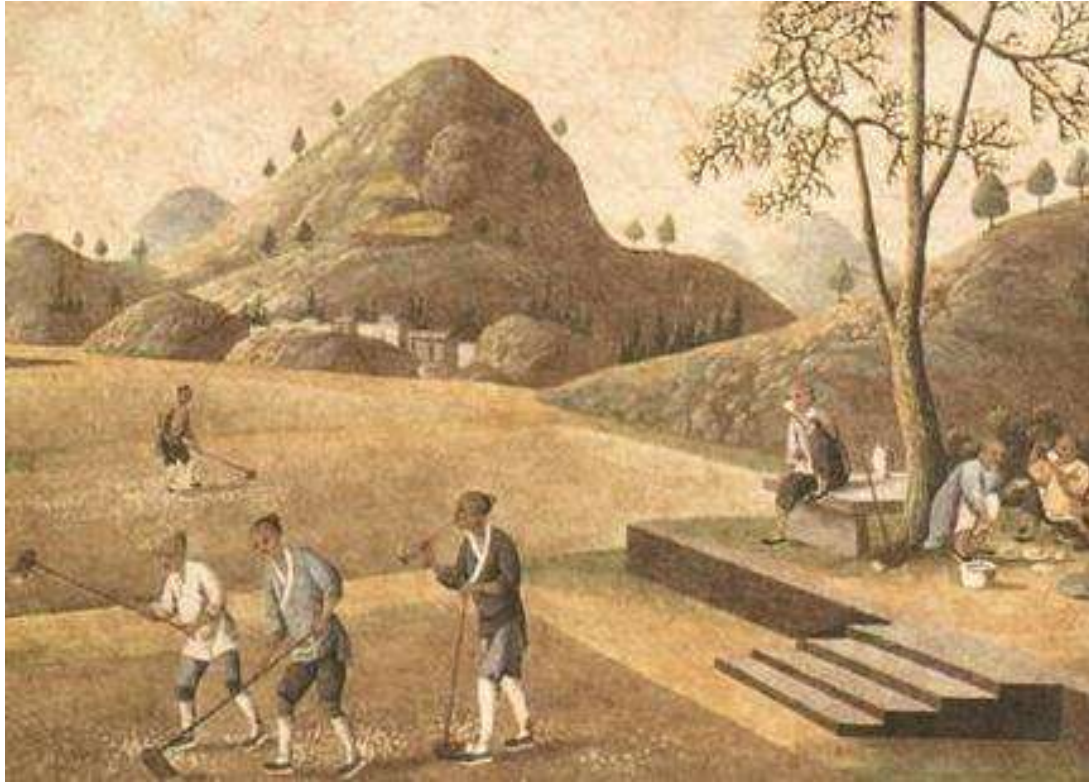
数学逐渐形成独立的学科

早期几何学：

满足在测绘、建筑、天文和工艺制作中的实际需要。

几何 (Geometry)：

最初的几何学就是如何测量土地面积的学问。



土地测量员：

如何划分土地面积？

如何按照面积计算土地的价格？

两块地哪块更接近水源？

水渠的修建应该遵守什么样的路线才能使距离最短？



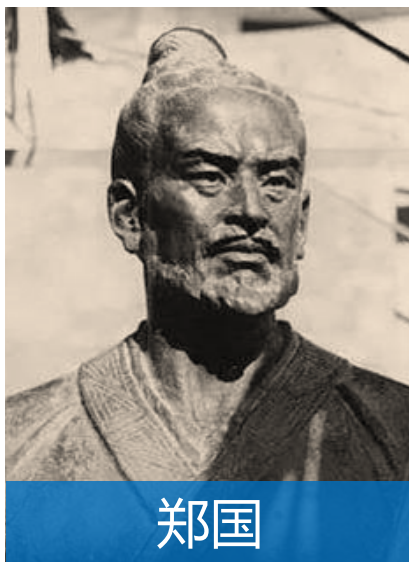
大禹治水

大禹

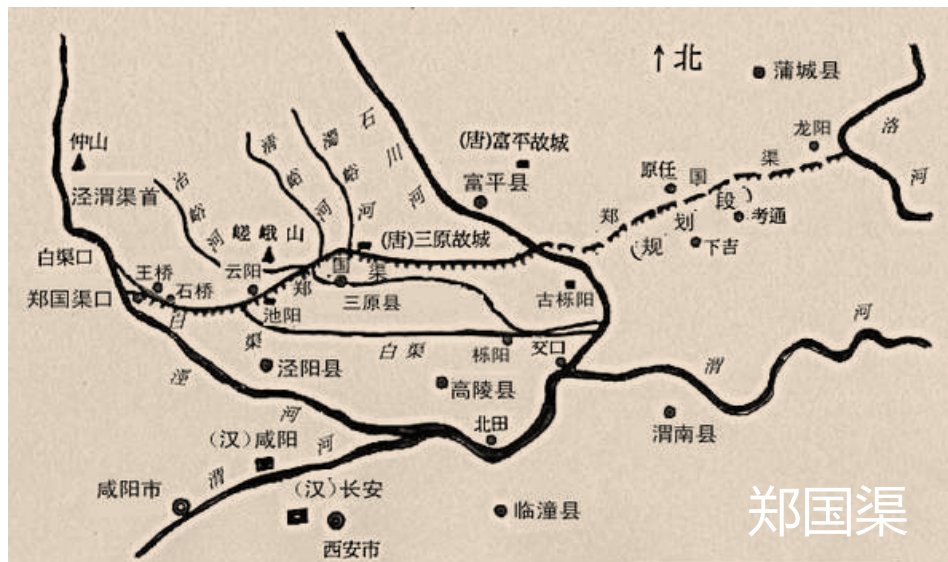
据说是我国最早的测量员之一。

郑国

水利家，我国古代四大古渠之一郑国渠。



郑国



郑国渠

工艺制作中的几何——

新石器时代陶罐的几何纹饰之美



锯齿菱格纹彩陶罐

甘肃省博物馆藏



旋涡纹瓶

马家窑文化



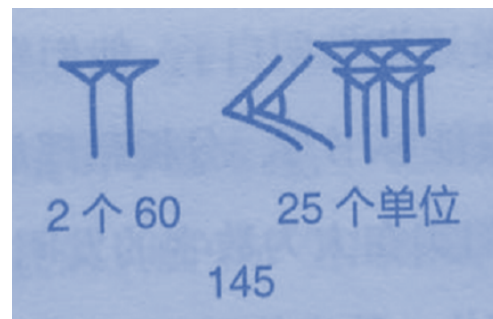
彩绘小陶罐

马家窑文化（半山文化）



埃及人已有锥台体积的公式
埃及金字塔：对称、比例精确的三角形

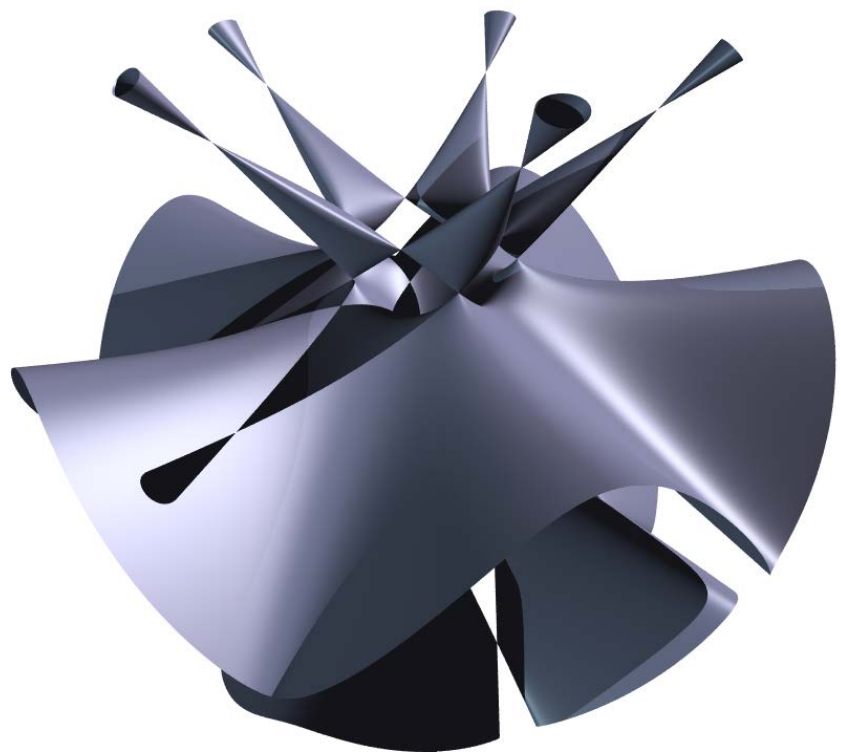
金字塔



德国佩加蒙博物馆
伊什塔尔城门

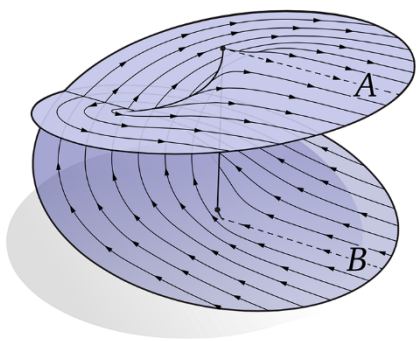
古巴比伦数学

- **计数法采用十进位和六十进位法：**
钉头型代表1，尖头型代表10。从60起使用符号组，记录60的符号也是由之前的符号构成。
- 在代数领域，可解含有三个未知数的方程式。有三角函数表。



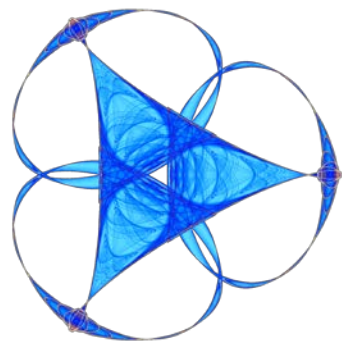
数学是抽象严密的逻辑体系

数学的几个特点



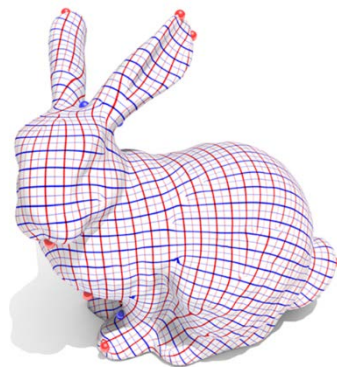
指向

现象背后的客观规律



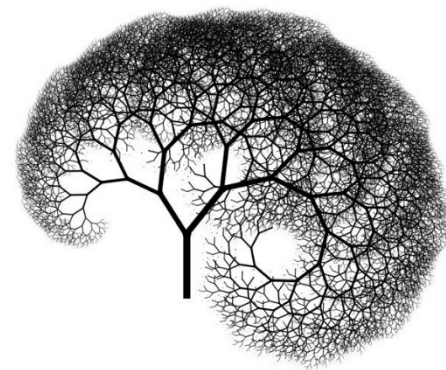
追求

抽象美和终极真理



驱动

以兴趣和好奇心
为首要驱动



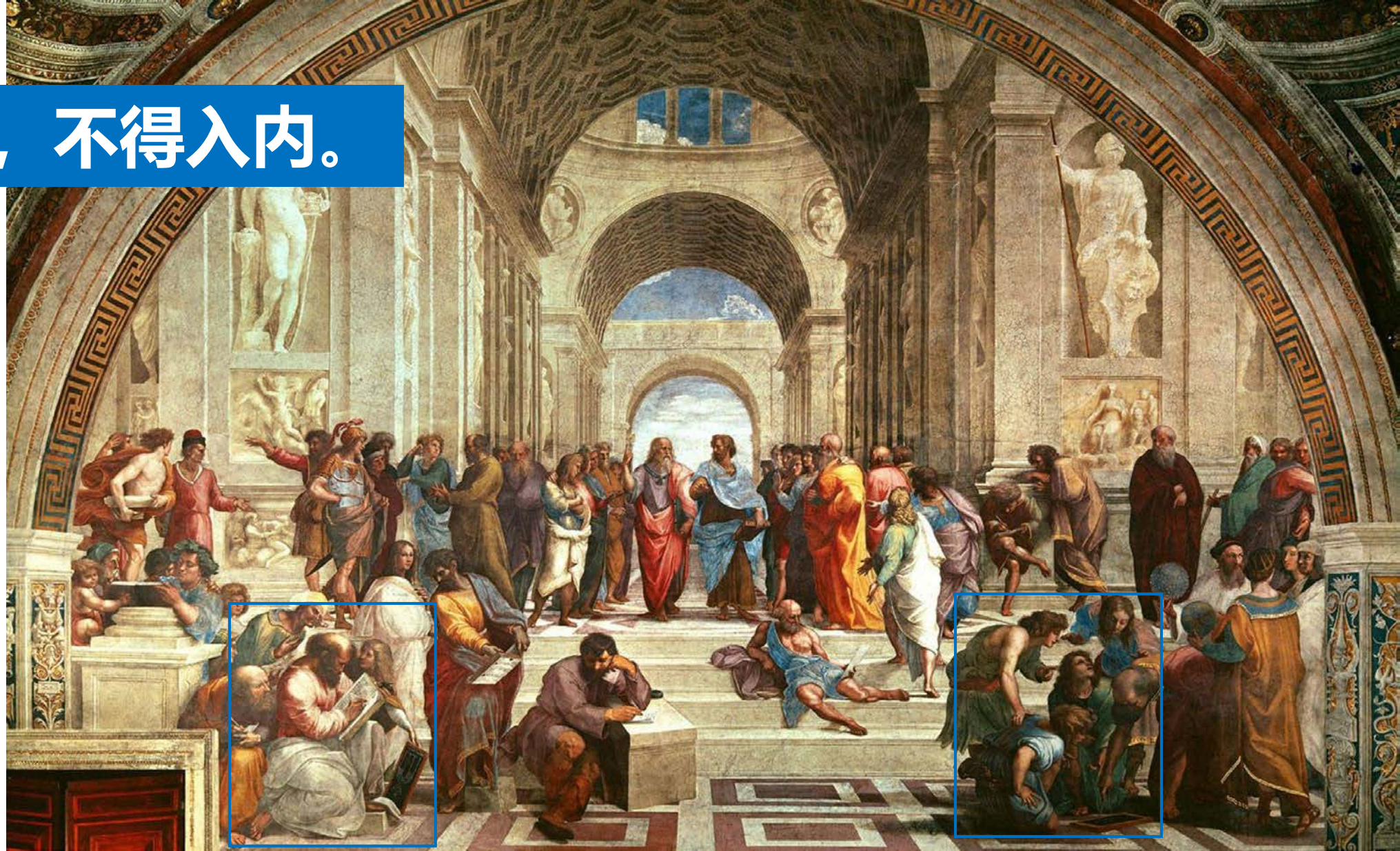
纯粹

正确与否不因
人的意志而变

不懂几何者，不得入内。

世界上比较早地用严密逻辑探讨世界本源的发端之一是意大利半岛的古希腊。

《雅典学园》中，两位古代伟大的数学家被安置在显著的位置。左边方框中中心人物是毕达哥拉斯，右边是欧几里得。



拉斐尔《雅典学园》（1511）湿壁画，现存梵蒂冈教皇签字厅



欧几里得

欧几里得几何学

不仅用于数学，也用于其他科学，甚至用于神学、哲学和伦理学中，产生了深远的影响。



《几何原本》



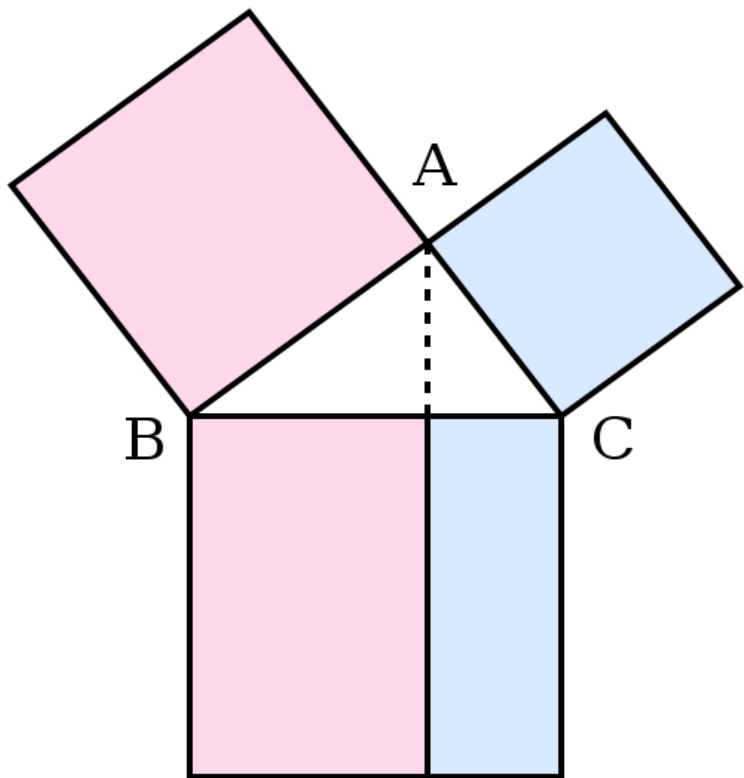
希帕提娅

古希腊著名数学家，哲学家。

希帕提娅出生在埃及，人称世界上第一位女数学家。这位聪慧的女性以她的才华和贡献跻身于古代世界最优秀的学者之列。而她的惨死在野蛮的教徒手下实为一千古悲剧。

希帕提娅对《几何原本》成书做出了重大贡献



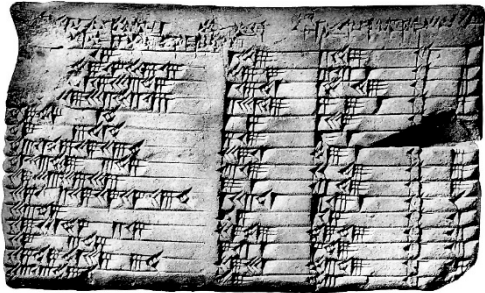


欧几里得

由公理、公设和定义出发，严格推导出命题。

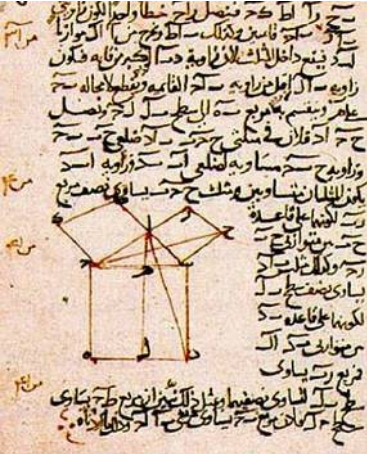
严格论证了毕达哥拉斯定理，即“勾股定理”。

勾股定理



18541, 12709, 13500

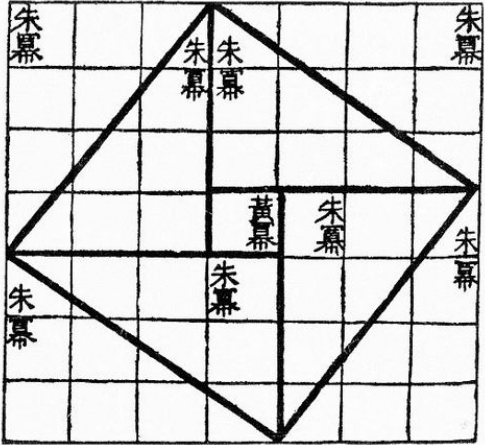
苏美尔



古埃及



古巴比伦



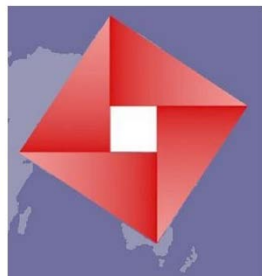
中国



赵爽弦图

赵爽，中国数学家，东汉末至三国时代吴国人。

“按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实。”

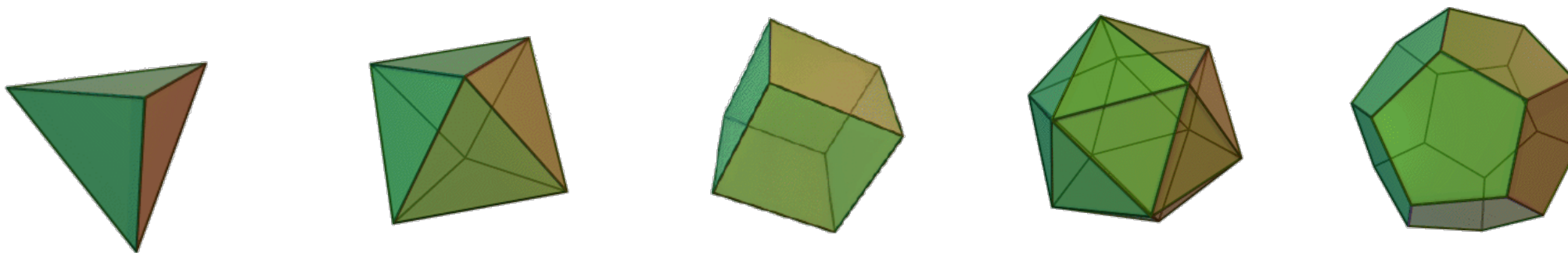


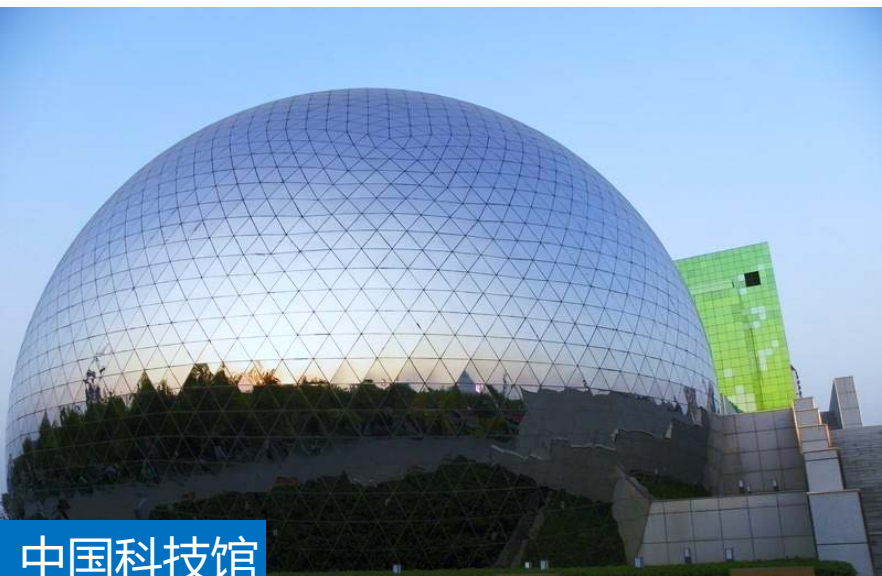
2002年国际数学家大会的会标，
现在也是中国数学会的标志。

泰阿泰德：只存在5种正多面体，不存在第6种。

然而，这5种正多面体被称为“柏拉图立体”。

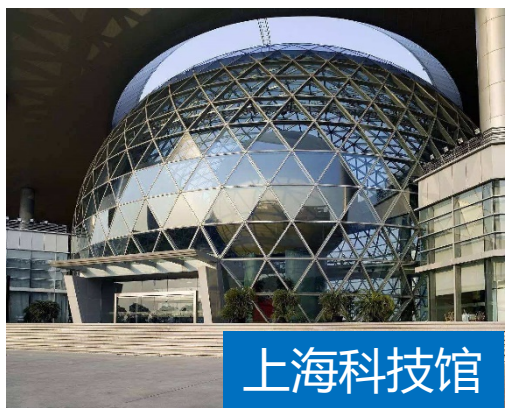
可见，被授予光环的也不一定是原本的发现者。



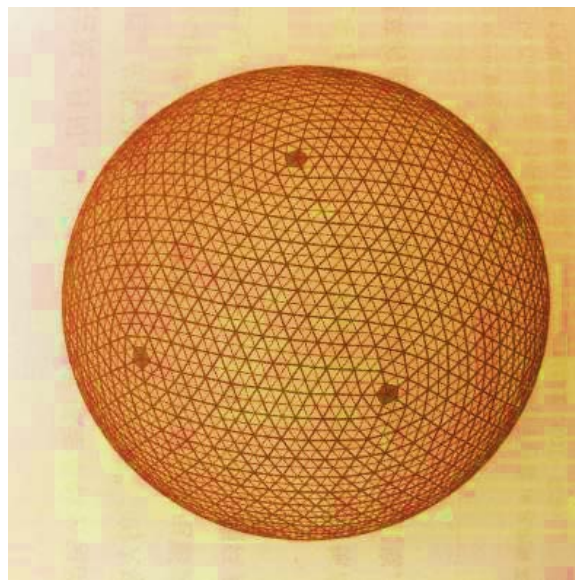


中国科技馆

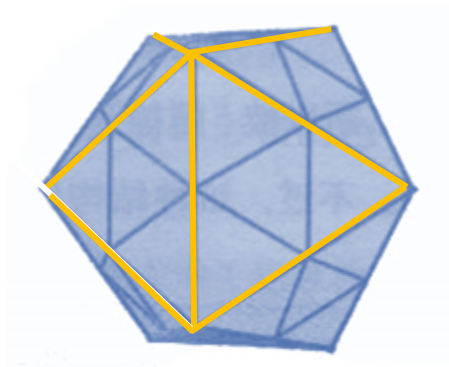
城市中很多球形建筑上都有**12个特殊的点**，
每个点由5个三角形组成。



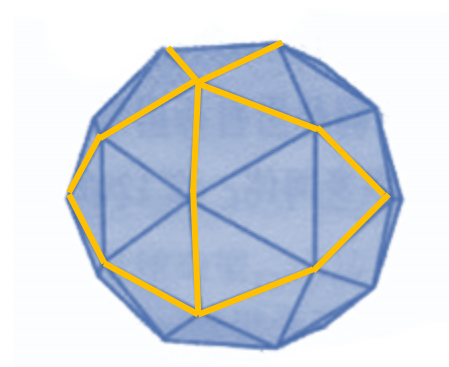
上海科技馆



类似于将正二十面体切割成若干小侧面，变成类球体形状。



将正二十面体的每个侧面切分为4个三角形

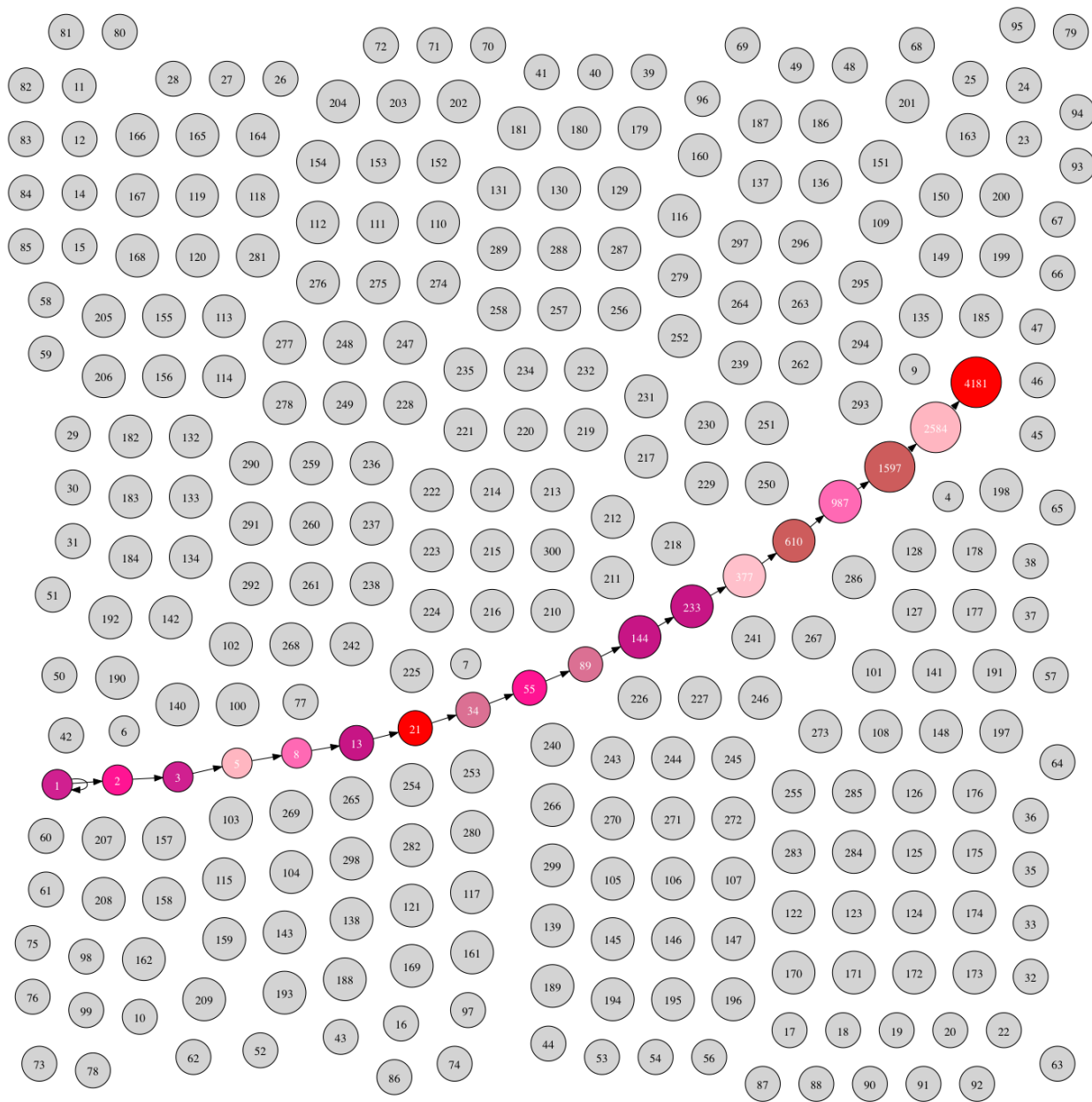


侧面被切割并被“吹鼓”的正二十面体



比如足球其实是截去顶点并稍加吹鼓起来的正二十面体。





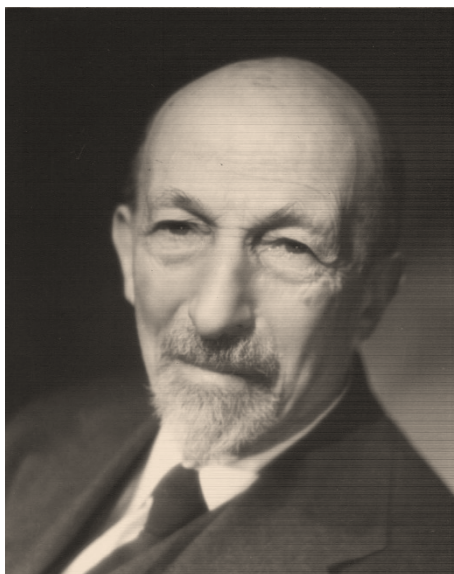
《几何原本》还有数论的结果：

有无穷多个素数。

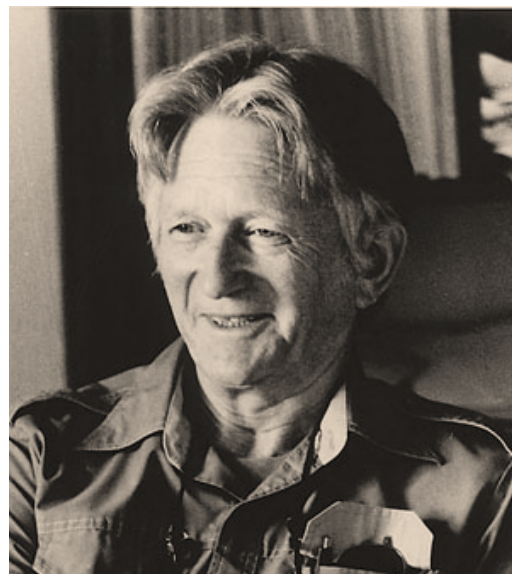
素数被认为是数的“原子”。

数论是数学的核心分支之一，
如被誉为“皇冠上的明珠”的哥德巴赫猜想，
至今最好的结果是1966年陈景润先生证明的。

现代信息安全技术的基础。



Jacques Hadamard



Atle Selberg

素数定理

(prime number theorem)

设 $x \geq 1$, 以 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数,
当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\pi(x) \sim x/\ln(x)$ 。

如果 x 是1亿, 素数有300多万。如果 x 是100亿, 素数有3亿多。

From the Academy Award-Winning Director of "Forrest Gump" and Pulitzer Prize-Winning Author of "Contact."

JODIE FOSTER
MATTHEW McCONAUGHEY

A message from deep space.
Who will be the first to go?
A journey to the heart of the universe.

CONTACT

WARNER BROS. PRESENTS

SOUTH SIDE AMUSEMENT COMPANY A FILM BY ROBERT ZEMECKIS STARRING JODIE FOSTER MATTHEW McCONAUGHEY "CONTACT"
JAMES DOOLAN JOHN HURT TOM SERRITT ANGELO RUSSELL ALAN SILVESTRI ARTHUR SCHMIDT EDWARD VERDUGA
DIN BURNESS CARL SAGAN ANN DRIESEN JOHN BRADSHAW LINDA CRIST CARL SAGAN ANN DRIESEN CARL SAGAN
JAMES V. HURT MICHAEL GOLDENBERG ROBERT ZEMECKIS STEVE SHARKEY ROBERT ZEMECKIS

PG PARENTS STRONGLY CAUTIONED
SOME MATERIAL MAY BE INAPPROPRIATE FOR CHILDREN UNDER 13



获奖好莱坞科幻电影

《超时空接触》

片中人物利用素数的**数学理论**
破译了来自外太空的密码。

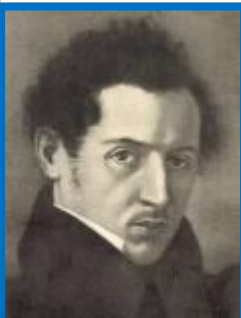
数学结论最基本的要求是“正确”

《几何原本》头四条公设为：

1. 由任意一点到任意一点可作直线。
2. 一条有限直线可以继续延长。
3. 以任意点为心及任意的距离可以画圆。
4. 凡直角都相等。
5. **“通过一已知点，能作且仅能作一条直线与已知直线平行。”**

第五公设能否作为公设，而作为定理？

这就是最著名的，争论了长达两千多年的关于“平行线理论”的讨论。



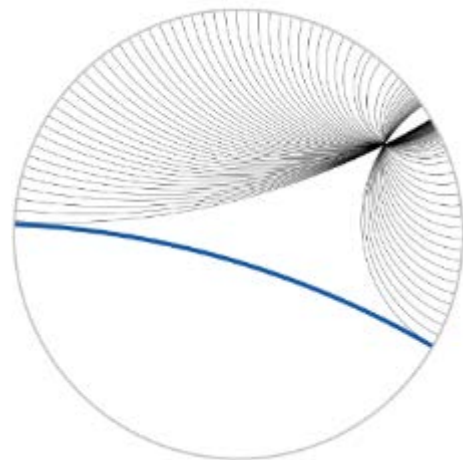
非欧几何学：在1830左右，俄国罗巴切夫斯基，匈牙利雅诺什发现了第五公设不可证明。

高斯也发现第五公设不能证明，但是高斯害怕这种理论会遭到教会力量的打击，不敢公开发表。

双曲几何

有常用的四种模式：

1. 克莱因模型
2. 庞加莱圆盘模型
3. 庞加莱半平面模型
4. 洛仑兹模型或单叶双曲面模型



如庞加莱圆盘模型所示，线通过一个给定的点且平行于一条给定的线。

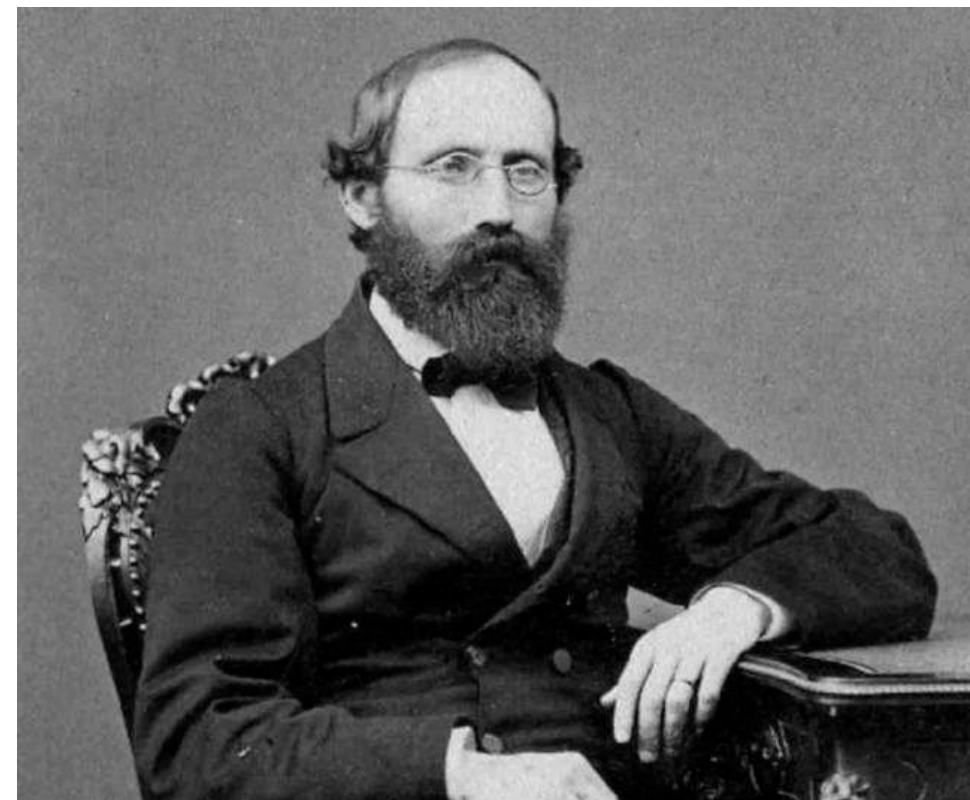
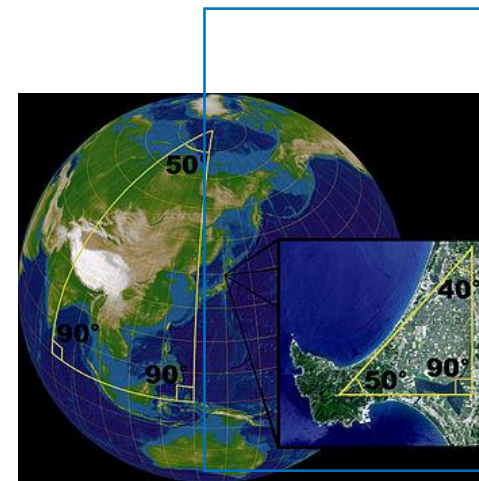


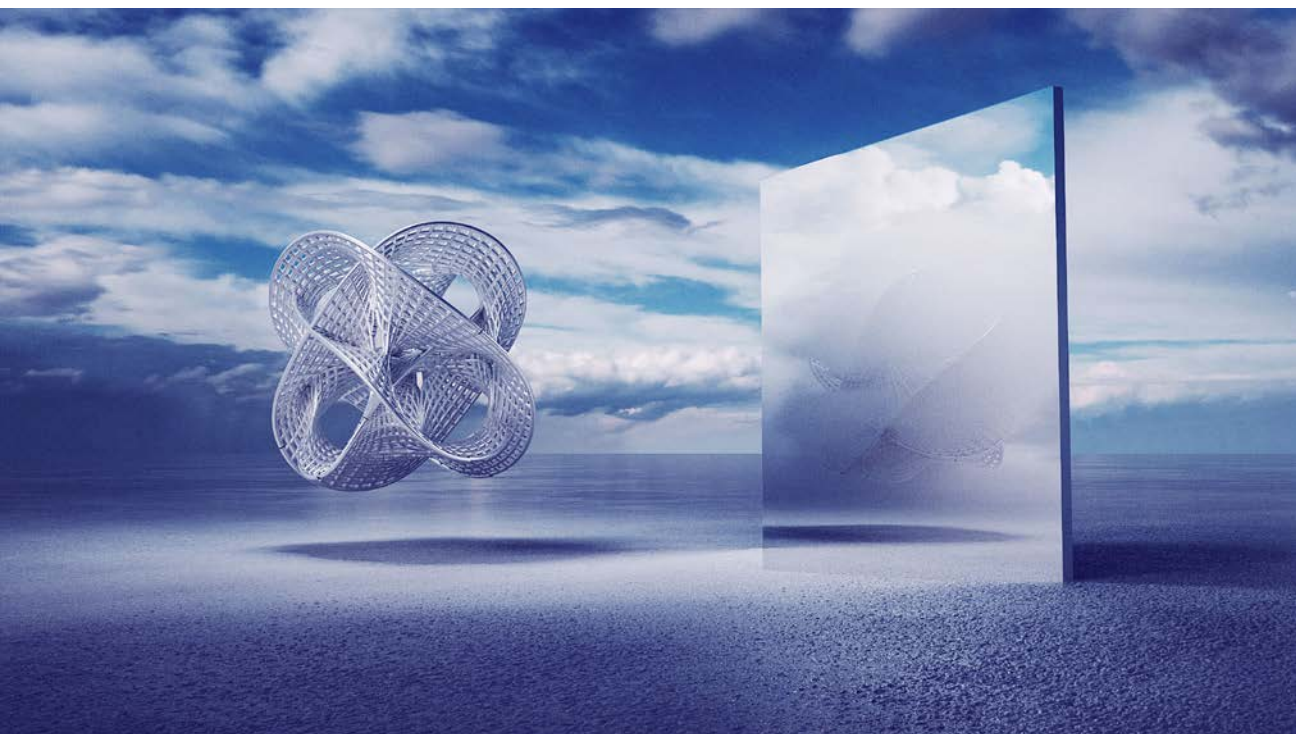
M.C. Escher圆极限 III, 1959。

黎曼

1851年创立黎曼几何，引进了流形和度量的概念，证明曲率是度量的唯一内涵不变量，具有划时代的意义。

1915年，爱因斯坦创立了新的引力理论——广义相对论，黎曼几何成为其重要工具。





数学无处不在

“数学是不以‘有用’为研究的原点，实际上却又是极为有用的学科。”

——《数学有用》，2014年1月14日光明日报



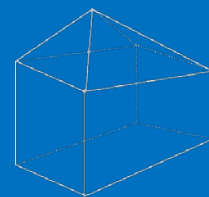
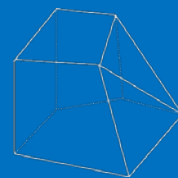
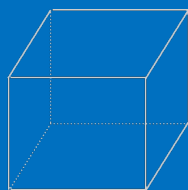
简洁

爱因斯坦说过：“美在本质上终究是简单性。”

顶点 边 面

欧拉公式： $V - E + F = 2$

无法说清楚有多少凸多面体，
但它们都必须服从欧拉公式。
且由此可推出只存在5种正多面体。



上世纪40-60年代，示性数理论得到进一步发展，引进了陈数、庞特里亚金数，证明了Gauss-Bonnet-Chern定理，指标定理。这些新理论与物理中规范场论有紧密联系。

在凝聚态物理中，量子霍尔效应的拓扑序可用示性数描述。

$$\frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} G = \chi(M)$$

陈省身



The Nobel Prize in Physics 2016



Ill: N. Elmehed. © Nobel
Media 2016
David J. Thouless
Prize share: 1/2



Ill: N. Elmehed. © Nobel
Media 2016
F. Duncan M.
Haldane
Prize share: 1/4



Ill: N. Elmehed. © Nobel
Media 2016
J. Michael Kosterlitz
Prize share: 1/4

2016年诺贝尔物理学奖颁发给三位从事拓扑相变和拓扑物质形态研究的学者。

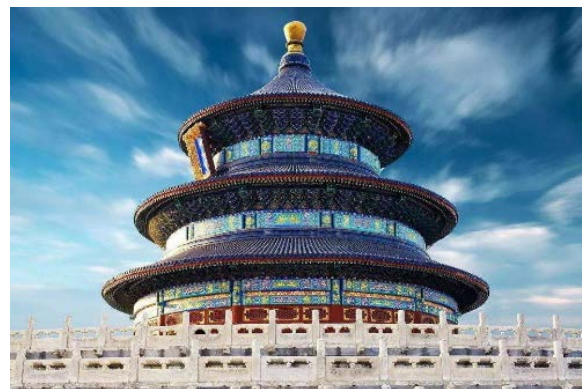
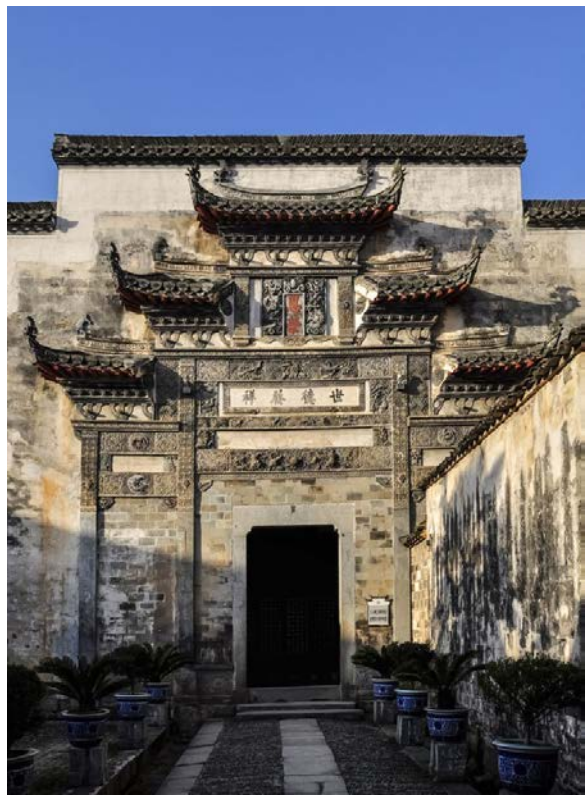
拓扑物质形态用拓扑示性数，比如“**陈数**”，来刻画新的物质形态。

拓扑相还存在于三维材料中，这些拓扑材料有望在新一代电子器件和超导体中产生应用，以及在未来量子计算机方面有应用。

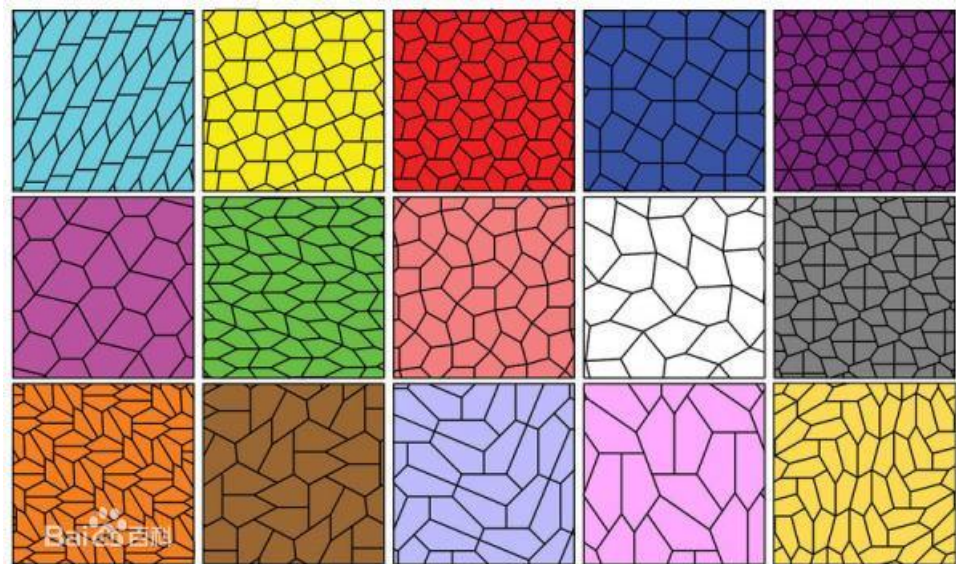
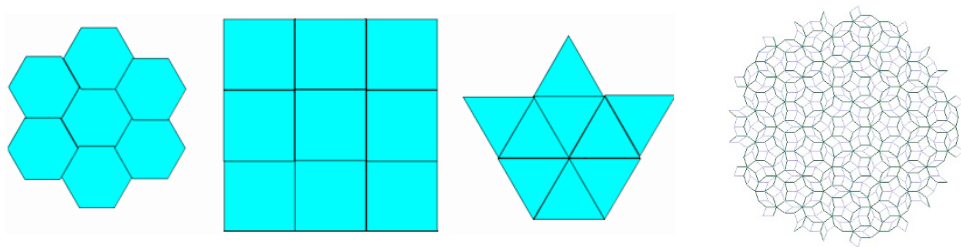


对称

是数学美的一个基本内容。



中国的建筑就很好地应用了数学的对称美，有许多的园林建筑都应用了这一点。



密铺

建筑中也常见到

除正三角形、正四边形和正六边形外，
其他正多边形都不可以密铺平面。

第16种可密铺五边形是2015年由美国数学家发现的。



西班牙格拉纳达红宫

伊斯兰世界在西班牙留下的辉煌古迹。

采用各种几何图形的对称、旋转、平移。

目前存在只存在17种类型的几何密铺，在红宫都可以找到。



Pierre de Fermat

深刻

数学中最漂亮的部分常联系着不同的分支，揭示特定的本质。

勾股定理： $a^2 + b^2 = c^2$ 有整数解。

著名的费马大定理就是记录在Arithmetica的1621年版的书中：如果 $n > 2$ ，则 $a^n + b^n = c^n$ 没有非零整数解。

费马声称自己有一个“绝妙的证法”，当然没有写下来。



Andrew Wiles

英国著名数学家、牛津大学教授

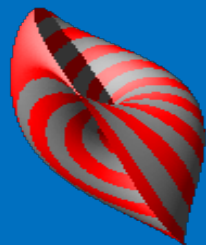
费马猜想在1994年被怀尔斯证明。

怀尔斯的证明用到了大量现代的数学工具和技巧，
这个证明揭示了椭圆曲线和数论之间的深刻联系。

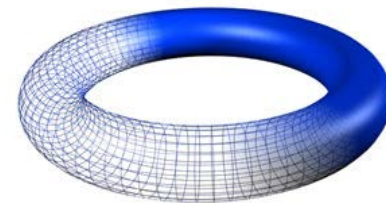
Fermat大定理的证明 基于椭圆曲线的理论

近十几年来，利用椭圆曲线的密码系统（ECC, Elliptic Curve Cryptography）越来越受到重视。椭圆曲线在密码学中的使用是在 1985年由N. Koblitz和V. Miller 分别独立提出的。

椭圆曲线密码的安全性远高于用素数分解的RSA算法。RSA算法是由MIT研究人员Rivest, Shamir和Adleman在1978年公开推广的，其基本原理依赖于素数理论



椭圆曲线就是三次代数曲线，即复平面上三次代数多项式的零点集，如 $y^2 = x^3 + 1$, $y^2 = 5x^3 - 7$ 等。研究一般多项式零点集的几何称为代数几何。





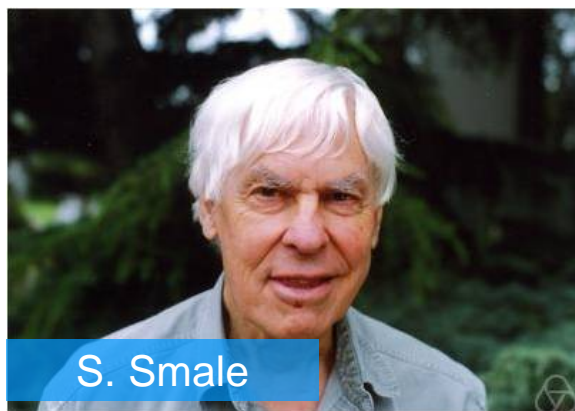
统一

数学的统一性可表现为数学概念、规律、方法的统一，数学理论的统一，数学和其他科学的统一。

1904年，著名法国数学家亨利·庞加莱（1854-1912）提出了一个拓扑学的猜想：“**任何一个单连通的，闭的三维流形一定同胚于一个三维的球面。**”

庞加莱猜想可以通俗地说成：任何一个满足这样性质的三维空间，它“本质上”是一个三维的球。这个猜想可以被推广到三维以上空间，被称为“**高维庞加莱猜想**”。

多年来，每一次庞加莱猜想的突破都是数学界的大事情。



1. 1961年**S. Smale**证明了庞加莱猜想的五维空间和五维以上的情形，立即引起轰动。斯梅尔由此获得1966年菲尔茨奖。
2. 1982年，**M. Freedman**将证明又向前推动了一步，他证明了四维空间中的庞加莱猜想，并因此获得1986年菲尔茨奖。
3. 拓扑学的方法研究三维庞加莱猜想没有进展，有人开始想到了其他的工具。**W. Thurston**就是其中之一。他引入了几何结构的方法对三维流形进行切割，提出了几何化猜想并解决了一个重要情形。他获得了1982年的菲尔茨奖。

七大千禧年难题

NP完全问题

霍奇猜想

庞加莱猜想

黎曼假设

杨-米尔斯理论

纳卫尔-斯托可方程

BSD猜想

千百年来，一大批数学家在拓展人类思维边界的道路上，不懈努力，取得了众多的杰出成果。还有很多**悬而未解的重大问题**，有待有志者去解决。比如，克雷数学所“七大千禧年难题”。



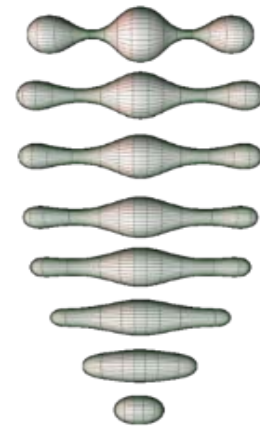
破解每个难题都可获得100万美元的奖励，这七大数学难题被认为是“对数学发展具有中心意义、数学家们梦寐以求而期待解决的重大难题”。



G. Perelman也理所当然地得了菲尔兹奖，但是他没有去领奖。

格里戈里·佩雷尔曼 (G. Perelman) 在花
了8年时间研究这个足有一个世纪的数学难题后，
在2002年11月和2003年7月之间，将3份关键论文的手稿上传到
arXiv.org这个刊登数学等学科的预印本论文的网站，并用电邮通知了几位数学家，声称自己证明了几何化猜想。

G. Perelman的证明中使用了R. Hamilton引进的Ricci流，它是一组微分方程。他通过完成一系列的拓扑手术，构造奇点可控的几何解，从而解决三维的庞加莱猜想。这是用几何分析技巧理解拓扑问题的典范。



Ricci Flow



艾萨克·牛顿

物理学家、数学家

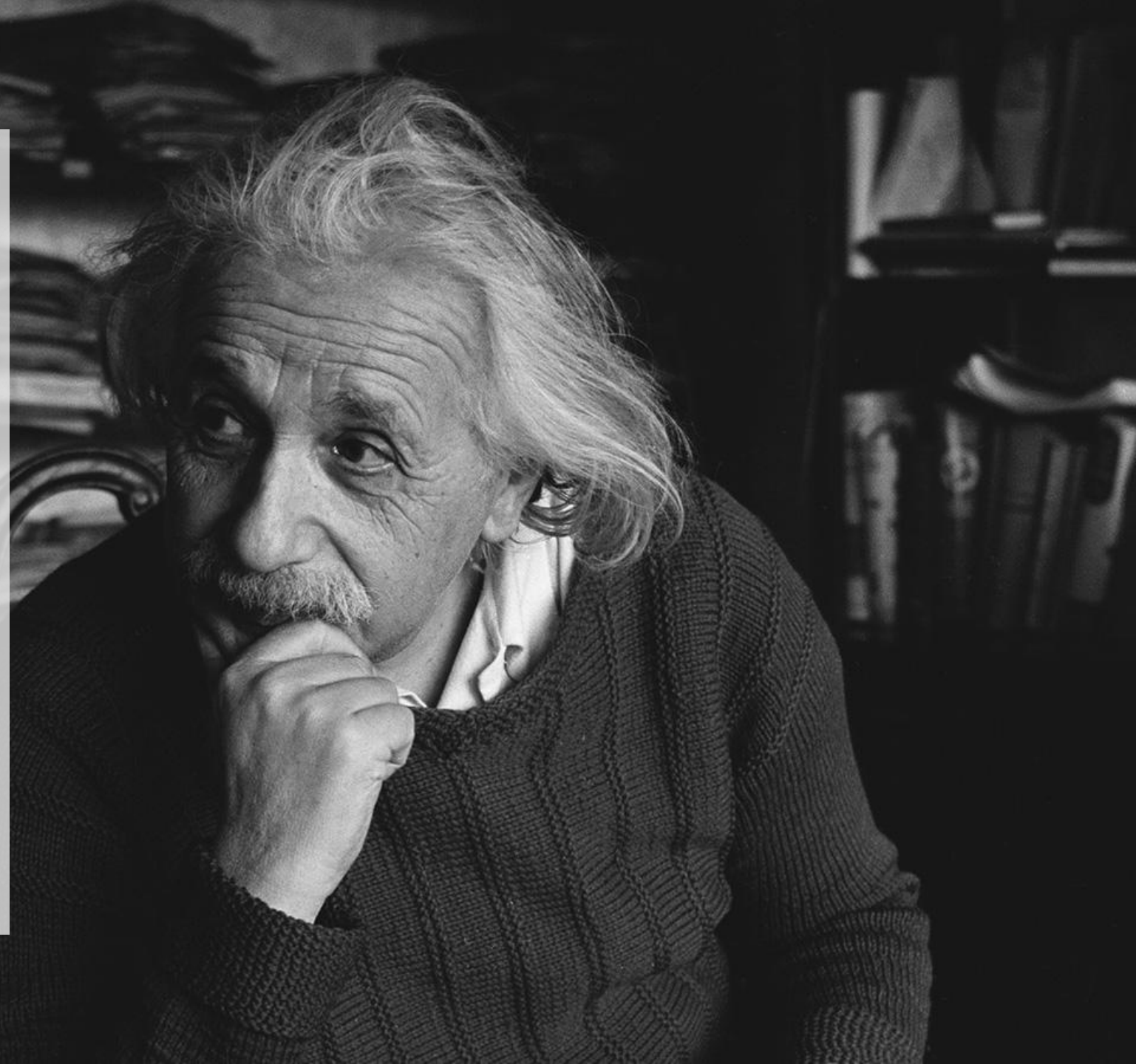
**不仅数学不同分支之间有深刻的联系，
数学和物理更是自古就相互启发，相互推动，一同发展。**

爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

真空情形： $R_{\mu\nu} = 0$

在广义相对论中，宇宙一切物质的运动都可以用几何学中的曲率来描述，引力场实际上就是一个弯曲的时空。

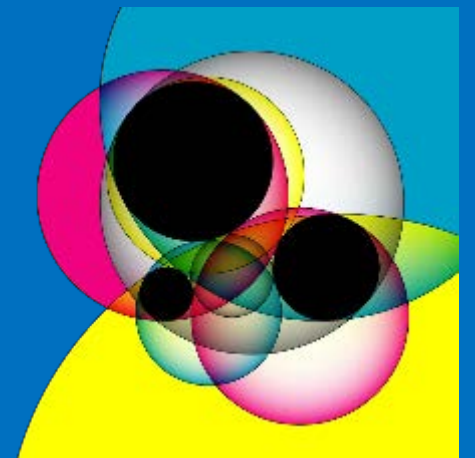


计数几何与拓扑场论

计数几何是代数几何的一个重要分支，研究几何方程的解的个数，它有非常悠久的历史。近三十年来，计数几何与物理的拓扑场理论研究相互影响，促进了两个学科的高度发展。量子同调环就是一例。1993年，**受物理中场论研究的启发，我和阮勇斌首次建立它的数学理论，解决了一类经典的计数几何问题。**



Apollonius问题是计数几何最早例子之一：**给定3个圆，或线，或点，有几个与它们相切的圆？**



数学在经济学、生物学等学科的发展中也起到非常重要的作用。



John Nash

- 诺贝尔经济学奖得主、阿贝尔奖得主、奥斯卡电影奖《美丽心灵》的主人公**约翰·纳什**是数学家，1994年获诺奖的论文发表在数学杂志上。
- 1997年诺贝尔经济学奖得主**罗伯特·莫顿**，他也是数学家。
- 2005年诺贝尔经济学奖得主**罗伯特·奥曼**的最高学历是麻省理工学院的数学博士。
- 2012年诺贝尔经济学奖颁发给哈佛大学教授**罗斯**和加州大学的**沙普利**，他们俩本科和博士都读的是数学专业。

数学与医学



医学中利用概率和统计来验证新药或程序的有效性，或估计接受某些治疗的癌症患者的存活率。

近年来，研究者们综合利用统计模型，基于多源信息对传染病的流行规律进行更加精确地建模分析。

The background is a solid blue color with various mathematical diagrams and formulas overlaid in a lighter blue. These include geometric shapes like rectangles and squares with side lengths labeled 'a' and 'b', and arrows indicating transformations. Algebraic expressions such as $a+b$, $a-b$, h^2 , $q \cdot c$, and $p \cdot c$ are visible. There are also labels for groups like $SL_2(\mathbb{R})$ and $PSL_2(\mathbb{R})$, and a sequence of boxes labeled A, B, C, D, E, F. The overall theme is mathematical research and its application in science and technology.

数学研究在发达国家的科学战略中始终居于最重要的地位

我们的国家要实现可持续发展不能缺少原创性的科学研究

不能缺少原创性的数学研究



中华人民共和国中央人民政府

www.gov.cn



国务院

总理

新闻

政策

互动

服务

首页 > 信息公开 > 国务院文件 > 科技、教育 > 科技

索引号: 000014349/2018-00011

发文机关: 国务院

标题: 国务院关于全面加强基础科学研究的若干意见

发文字号: 国发〔2018〕4号

主题词:

主题分类: 科技、教育\科技

成文日期: 2018年01月19日

发布日期: 2018年01月31日

国务院关于加强 基础科学研究的若干意见

国发〔2018〕4号

各省、自治区、直辖市人民政府，国务院各部委、各直属机构：

强大的基础科学研究是建设世界科技强国的基石。当前，新一轮科技革命和产业变革兴起，科学探索加速演进，学科交叉融合更加紧密，一些基本科学问题孕育重大突破。主要发达国家普遍强化基础研究战略部署，全球科技竞争不断向基础研究前移。经过发展，我国基础科学研究取得长足进步，整体水平显著提高，国际影响力日益提升，支撑经济社会发展的作用不断增强。但与建设世界科技强国的要求相比，我国基础科学短板依然突出，数学等基础学科仍是最薄弱的环节，重大原创性成果缺乏，基础研究投入、结构不合理，顶尖人才和团队匮乏，评价激励制度亟待完善，企业重视不够，全社会支持基础研究的环境需要进一步优化。为进一步加强基础科学研究，大幅提升原始创新能力，夯实建设创新型国家和世界科技强国的基础，现提出以下意见。

数学等基础学科的重要性得到国家重视，2018年国务院印发《关于全面加强基础科学研究的若干意见》，以进一步加强基础科学研究、大幅提升原始创新能力，夯实建设创新型国家和世界科技强国的基础。



信息名称: 科技部办公厅 教育部办公厅 中科院办公厅 自然科学基金委办公室印发《关于加强数学科学研究工作方案》的通知
索引号: 306-07-2019-853 信息类别: 规范性文件2019
发布机构: 科技部办公厅,教育部办公厅,中科院办公厅,自然科学基金委 发文日期: 2019年07月12日
文号: 国科办基〔2019〕61号 效力:

科技部办公厅 教育部办公厅 中科院办公厅 自然科学基金委办公室印发《关于加强数学科学研究工作方案》的通知

国科办基〔2019〕61号

各有关单位:

为落实《关于全面加强基础科学研究的若干意见》(国发〔2018〕4号)要求,切实加强我国数学科学研究,科技部、教育部、中科院、自然科学基金委联合制定了《关于加强数学科学研究工作方案》。现印发给你们,请结合本单位实际认真落实。

科技部办公厅 教育部办公厅 中科院办公厅

自然科学基金委办公室

2019年7月12日

(此件主动公开)

2019年7月12日,科技部、教育部、中科院、自然科学基金委四部委联合印发《关于加强数学科学研究工作方案》。

工作方案指出:**数学实力往往影响着国家实力**,几乎所有的重大发现都与数学的发展与进步相关,数学已成为航空航天、国防安全、生物医药、信息、能源、海洋、人工智能、先进制造等领域不可或缺的重要支撑。

天道几何 万品流形先自守
变分无限 孤心测度有同伦

数学深深吸引着一代又一代有志之士
不断探索、攀登



谢谢大家

注：演示文稿主要图片来自于网络，特此致谢

